Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

ERASMUS+ 2022-1-IT02-KA121-SCH-000052744

CODICE ATTIVITÀ: 2021-1-IT02-KA120-SCH-000045193

Prodotto dell'intervento Proff. Catrambone-Crapis-Massara

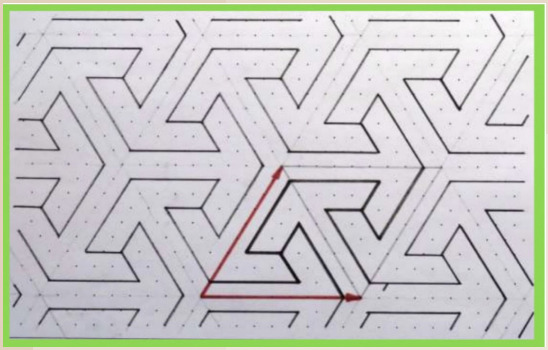
GROUP MOBILITY OF SCHOOL PUPILS, held in IES Miraflores de los Ángeles, Malaga (SPAIN) from 18th to 27th May 2023.

TITOLO

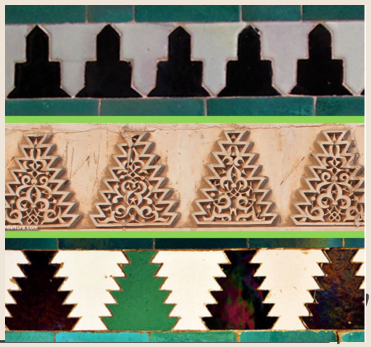
LA MATEMATICA ATTRAVERSO I MOSAICI NELL'ALHAMBRA

TITOLO	LA MATEMATICA ATTRAVERSO I MOSAICI NELL'ALHAMBRA
DOCENTI	Matematica e lingue
PERIODO	II quadrimestre
TEMPO DI REALIZZAZIONE	6 ore
MATERIALI	Fotocopie, libri,ppt presentation,video
WEB RESOURCES	URLS, Files, presentation
STRUMENTI	Imagini/figure -LIM-Powerpoint presentation, video
OBIETTIVI	Applicare la matematica in un compito di realtà
CONTENUTI	- Applicazione dei teoremi - I manufatti architettonici
COMPETENZE	-ricavare informazioni da una esperienza pratica - classificare le informazioni - cercare informazioni su Internet -creparazione di diapositive powerpoint - abilità comunicative: gli studenti possono interagire con altri studenti. - abilità sociali: gli studenti sanno interpretare e utilizzare l'insieme delle conoscenze su fatti e processi
CONOSCENZE	- Applicare regole - Trarre conclusioni - Confrontare - Riassumere
ABILITÀ	Gli studenti dovrebbero essere in grado di: -svolgere ricerche attive -lavorare in gruppo -relazionare davanti ai coetanei
VALUTAZIONE	Il docente monitora: -attività di gruppo e individuali; -Interazione degli student; -partecipazione degli studenti a tutti i compiti e attività;

LA ALHAMBRA



$\sqrt{2}$



INTRODUCCIÓN:

La Alhambra es un excepcional conjunto monumental que se localiza sobre una colina rocosa situada en los márgenes del río Darro, en Granada. Su nombre procede de la palabra árabe *al-ḥamrā,* que significa 'la roja', se cree que por el tono de color rojizo de sus torres y muros. Creado originalmente con propósitos militares, el recinto fortificado fue al mismo tiempo una alcazaba (fortín), un alcázar (palacio) y una pequeña medina (ciudad).

Los inicios constructivos de la fortificación se remontan al siglo IX, aunque la fortaleza alcanzó su esplendor en la segunda mitad del siglo XIV, concretamente bajo los sultanatos de Yusuf I (1333-1353) y Mohamed V (1353-1391). En 1492, la Alhambra se convirtió en corte cristiana cuando los Reyes Católicos conquistaron Granada. Desde entonces a nuestros días, ha pasado por diversas etapas de mayor o menor abandono. En la actualidad, la Alhambra es el **principal referente de la arquitectura hispanomusulmana** y, gracias a su **enorme valor histórico y artístico,** fue declarada **Patrimonio Mundial de la Humanidad** por la UNESCO en 1984.

Los Palacios Nazaríes

Los Palacios Nazaríes de la Alhambra son un conjunto de tres palacios, construidos de manera independiente, los cuales tuvieron cada uno una función diferenciada.

De toda la **Alhambra**, los palacios nazaríes es lo más llamativo y visitado por casi **3 milllones de personas al año.**

Estos son, divididos en múltiples estancias dentro de cada uno de ellos:

- **El Mexuar**
- **El Palacio de Comares** (de Yusuf I)
- **El Palacio de los Leones** (de Mohamed V)

En estos palacios nazaríes se desarrolló la vida oficial y familiar de los reyes nazaritas de Granada. Tras **la conquista cristiana**, estos palacios eran conocidos como la **Casa Real Vieja.**



En el Palacio de los Leones encontramos

EL PATIO DE LOS LEONES:

Es el más elaborado.

Integrar el agua en la arquitectura es una obsesión en la arquitectura islámica. Canales lineales de agua y una fuente en el Centro.

Es una construcción literal del modelo de los jardines del Paraíso del CORÁN Recinto que divide al mundo en cuatro cuadrantes.

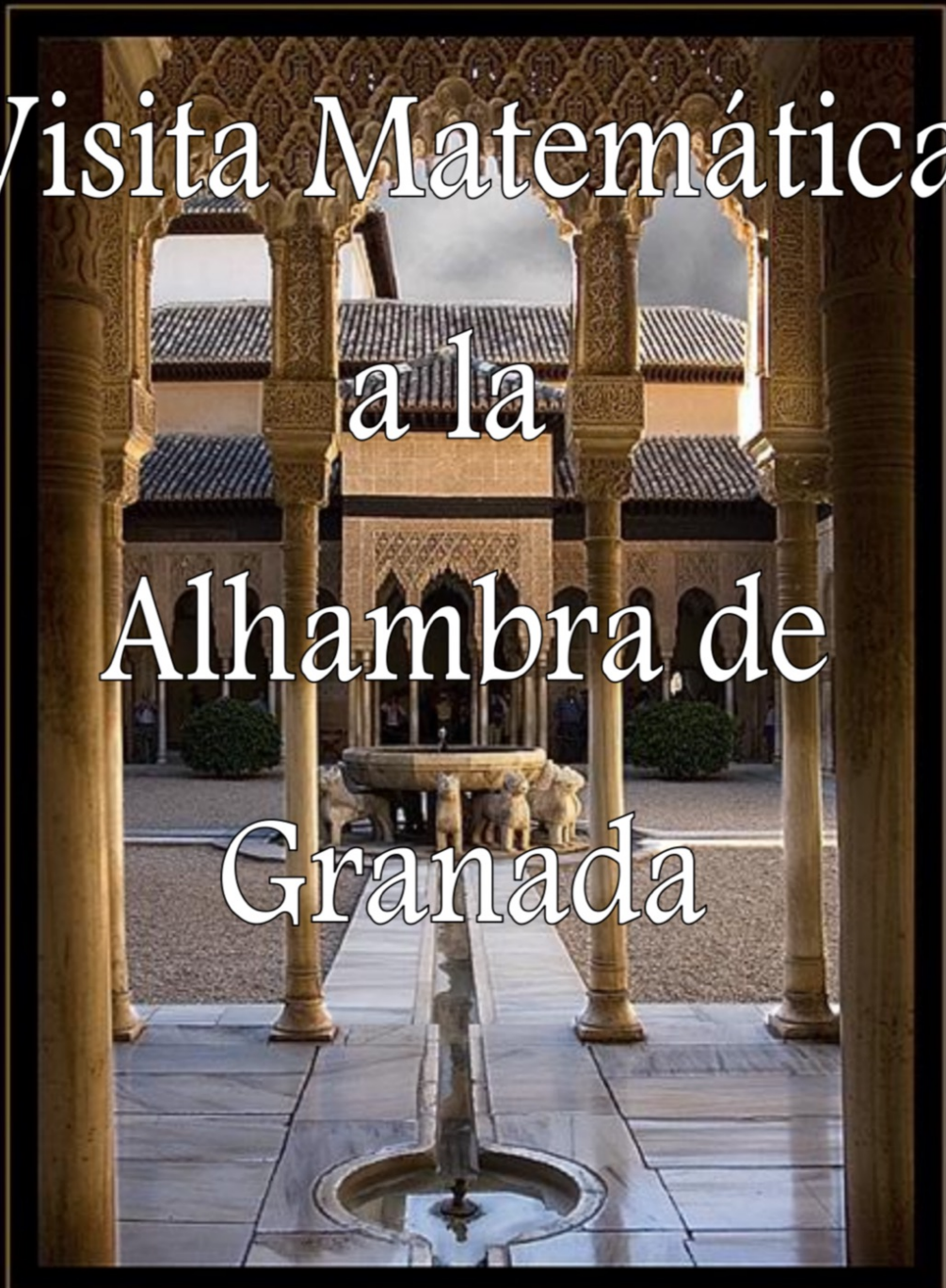
También encontramos

LA SALA DE LOS REYES:

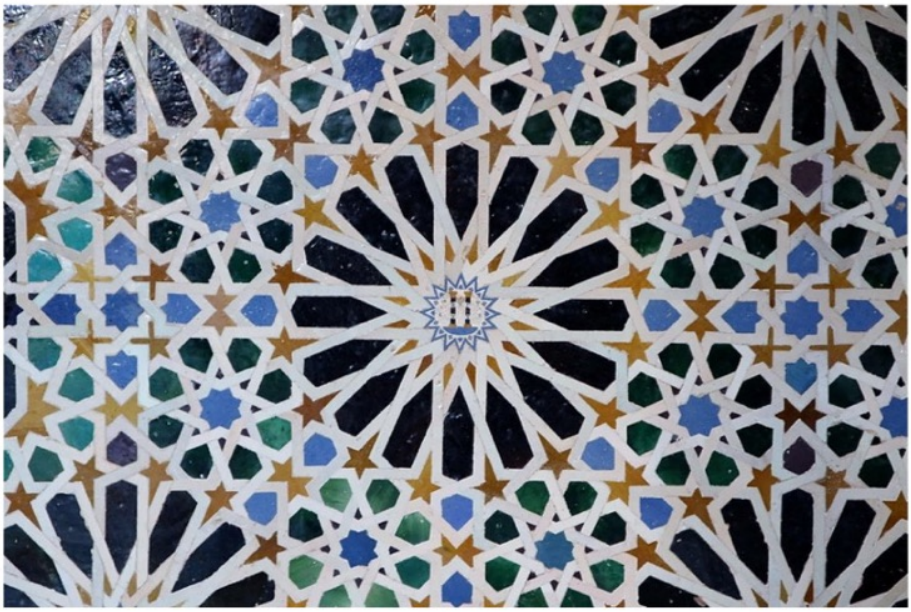
En el techo encontramos los diez primeros reyes de la dinastía pintados sobre cuero, con influencia del arte gótico cristiano.

Se cree que pudieron ser pintados por artistas cristianos.

Visita Matemática a la Alhambra de Granada



Patio de los leones



Claude Valette – Flickr

La Alhambra es admirada por amantes de la historia, la arquitectura, el arte, la artesanía… Pero, ¿sabías que, además, este conjunto monumental crea una especial fascinación en las personas aficionadas a las matemáticas? Te contamos por qué.

Mosaicos, geometría y los 17 grupos de simetría

Al hablar de la Alhambra, con frecuencia se nos vienen a la mente imágenes de los maravillosos mosaicos geométricos de azulejos que recubren buena parte de sus paredes y suelos. Estos revestimientos cerámicos constituyen una de sus mayores bellezas artísticas y también una de las curiosidades matemáticas de la Alhambra.

Para comprender qué son **los mosaicos**, podemos definirlos a grandes rasgos como **una composición, en este caso geométrica, de figuras que recubren todo el plano**, de tal forma que cumplen dos condiciones: las figuras no se solapan y no quedan huecos entre ellas. Las piezas que se utilizan se denominan teselas (o, según sus usos, baldosas, losetas, etc.).

Podemos encontrar diversos tipos de mosaicos: regulares, semirregulares, simples, complejos... Los más sencillos están formados por polígonos regulares del mismo tipo (por ejemplo, solo cuadrados, solo triángulos equiláteros o solo hexágonos). Pero también se pueden formar mosaicos combinando varios tipos de polígonos.

En cuanto a la manera de combinarlos, existen cuatro estrategias para rellenar un plano con losetas (o 'teselar un plano'), es decir, cuatro tipos de movimientos, basados en simetrías, desplazamientos y/o rotaciones:

1. Traslación: añadir nueva loseta sin ningún giro respecto a la anterior.
2. Rotación: añadir nueva loseta con algún giro sobre un punto fijo.
3. Reflexión o simetría: añadir nueva loseta de modo especular respecto a la anterior, con un eje de simetría.
4. Simetría con deslizamiento: añadir nueva loseta usando la traslación de la reflexión en el mismo eje sin un punto fijo.



En principio, podría parecer que existen infinitos grupos de simetría diferentes, o infinitas formas de combinar polígonos en un plano, pero no es así. En 1891, el matemático y cristalógrafo ruso Evgraf Fedorov demostró que **solo existen 17 posibles grupos cristalográficos para las figuras del plano**, denominados grupos cristalográficos planos.

La Alhambra: un caso único

Pues bien, aquí viene la curiosidad matemática que alberga la Alhambra: **en los adornos ornamentales que están presentes en sus suelos y muros se pueden encontrar ejemplos de cada uno de estos 17 grupos cristalográficos planos.** Los artistas musulmanes, por preceptos religiosos, no podían representar seres vivientes en sus creaciones. Sin embargo, esta limitación sirvió de aliciente para estimular su creatividad y explorar caminos geométricos de gran belleza y originalidad. Su conocimiento de las **simetrías** alcanzó tal magnitud que fueron los únicos en descubrir y utilizar sabiamente en sus decoraciones los 17 tipos de simetría plana.



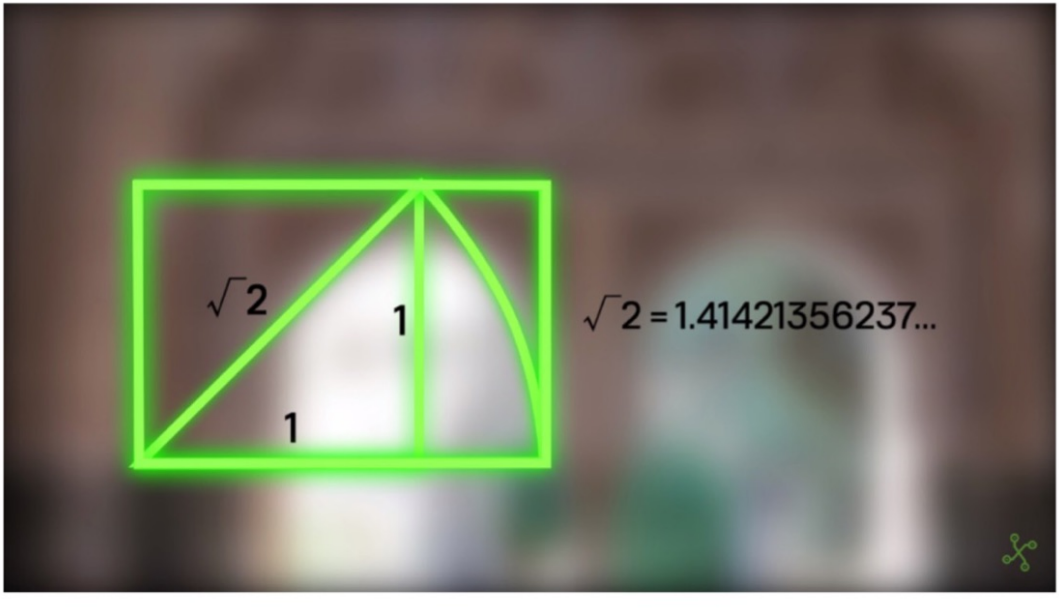
Por este motivo, la Alhambra tiene un especial interés para personas interesadas en las matemáticas, pues el libre y audaz método creativo empleado para elaborar los mosaicos pone de manifiesto el uso de conceptos científicos basados en hacer variaciones sobre una misma figura. Sin entrar en otros detalles relacionados con estos revestimientos cerámicos en los que sus constructores eran verdaderos maestros, podemos afirmar que la Alhambra es un ejemplo esplendoroso del hermanamiento entre **arte y matemáticas**.

MATEMÁTICAS EN LA ALHAMBRA

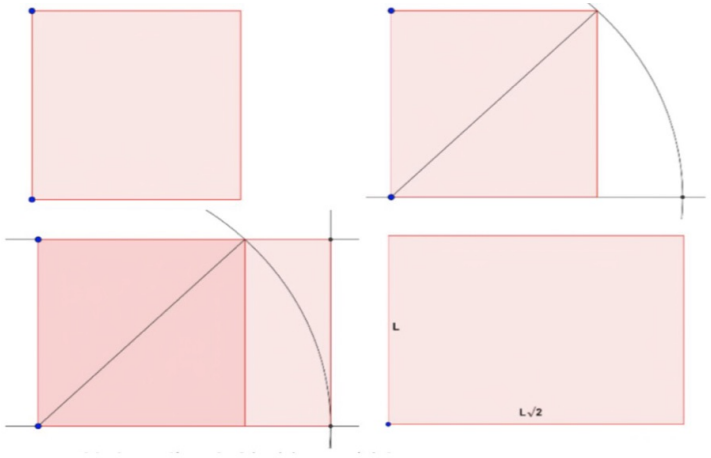
El rectángulo: una de las formas geométricas más usadas en el arte islámico y en la Alhambra

El rectángulo es una de las proporciones más usadas en la decoración musulmana, y por ende en el Islam, pero no un rectángulo cualquiera sino el de la raíz cuadrada de 2 (√2). ¿Por qué es tan especial?

√2 es un número irracional, el resultado de √2 es 1,41421356… Es decir, un número que nunca acaba. A priori no parece algo manejable para realizar cálculos, pero como nos explican Joaquín y Francisco, es una proporción muy fácil de usar geométricamente.



El rectángulo √2 se construye de forma muy sencilla: de un cuadrado sobre un lado se dibuja la diagonal, se abate sobre uno de los dos lados y trazando las paralelas se obtiene el rectángulo √2.



Una forma más fácil de entenderlo es con un folio estándar DIN A4, que se hizo (como todos los tamaños DIN, A3, A2, etc) siguiendo esta proporción.

Si dividimos el lado grande por el lado pequeño del A4, el resultado será 1,4142135… es decir, √2. En mano y geométricamente, esto se puede comprobar rápidamente acordándonos del teorema de Pitágoras, que nos dice que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Si hacemos un cuadrado con nuestro A4 podemos obtener un triángulo rectángulo. Si cada cateto mide 1, la hipotenusa mide √2. Y una forma rápida de comprobarlo es comparar la hipotenusa con el propio largo del rectángulo del A4.

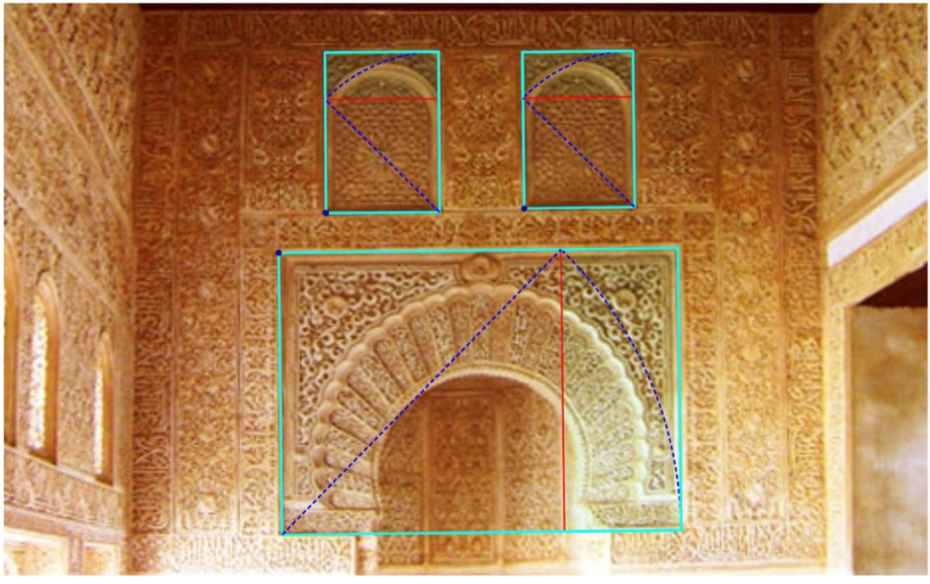


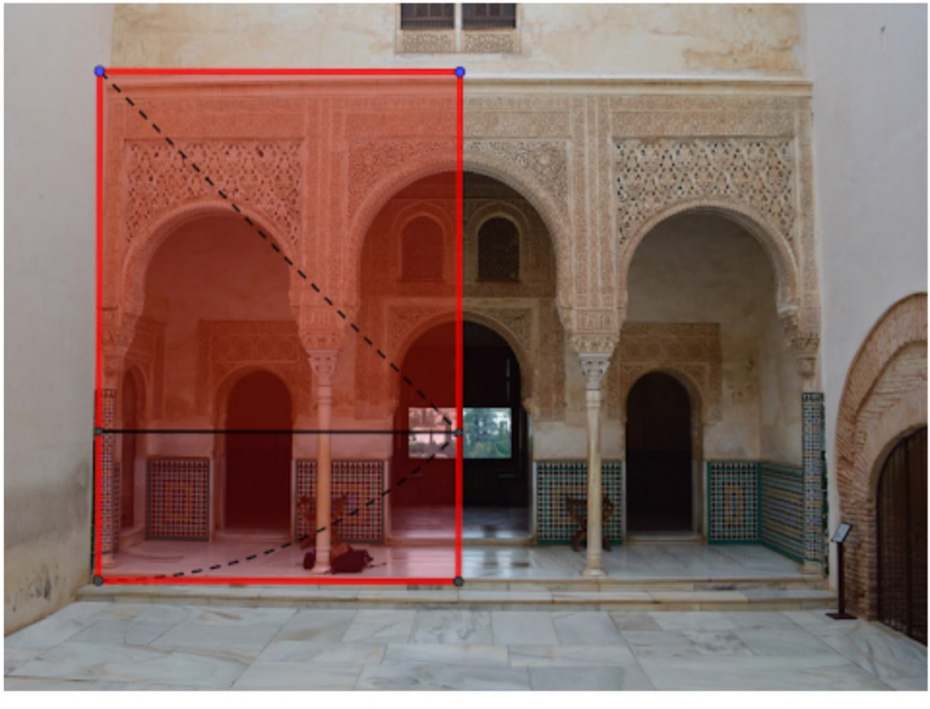
Efectivamente, si comprobamos la Puerta del Vino, **tiene la proporción de un rectángulo √2**. Se podría decir que esta entrada de la Alhambra tiene exactamente las mismas proporciones que un DIN A4.



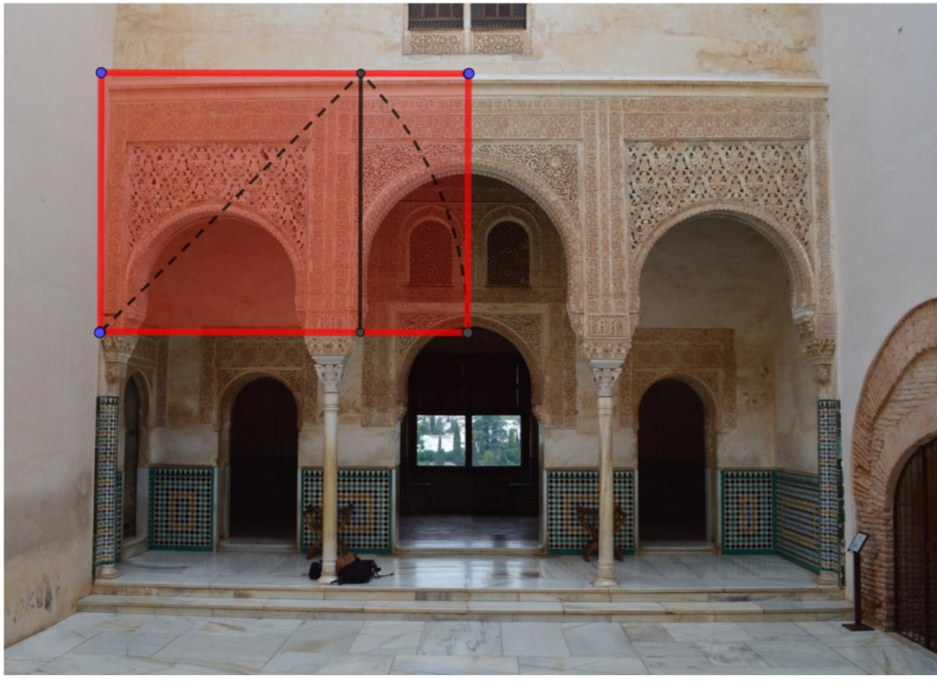
Una proporción que resulta tan especial porque es la única que al doblarse sobre sí misma reproduce exactamente la misma proporción del original. Es decir, si doblamos un A4 obtenemos dos A5 de proporción √2, si un A5 lo volvemos a doblar sobre sí mismo de nuevo obtenemos dos A6 de √2, y así sucesivamente.

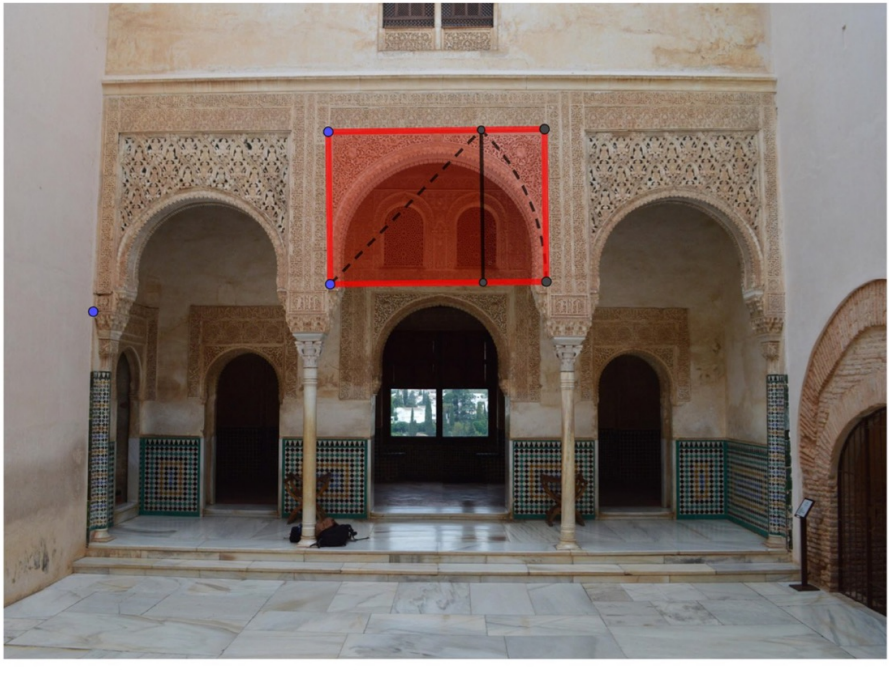
Esta proporción es la que consigue un equilibrio exquisito a la hora de aplicarlo a la arquitectura, y en este caso tanto los portones como ventanas de la Alhambra lo cumplen.

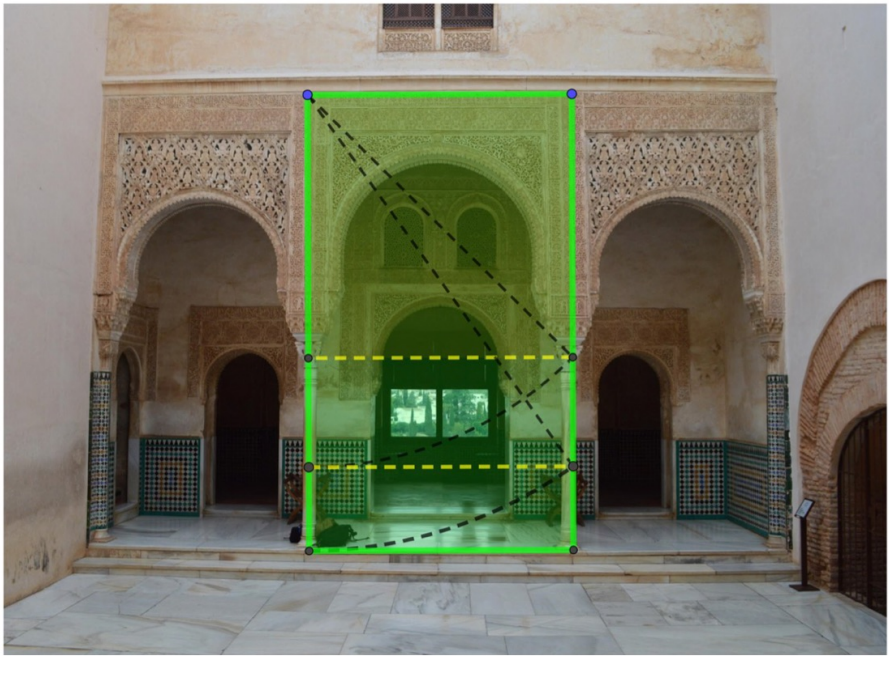








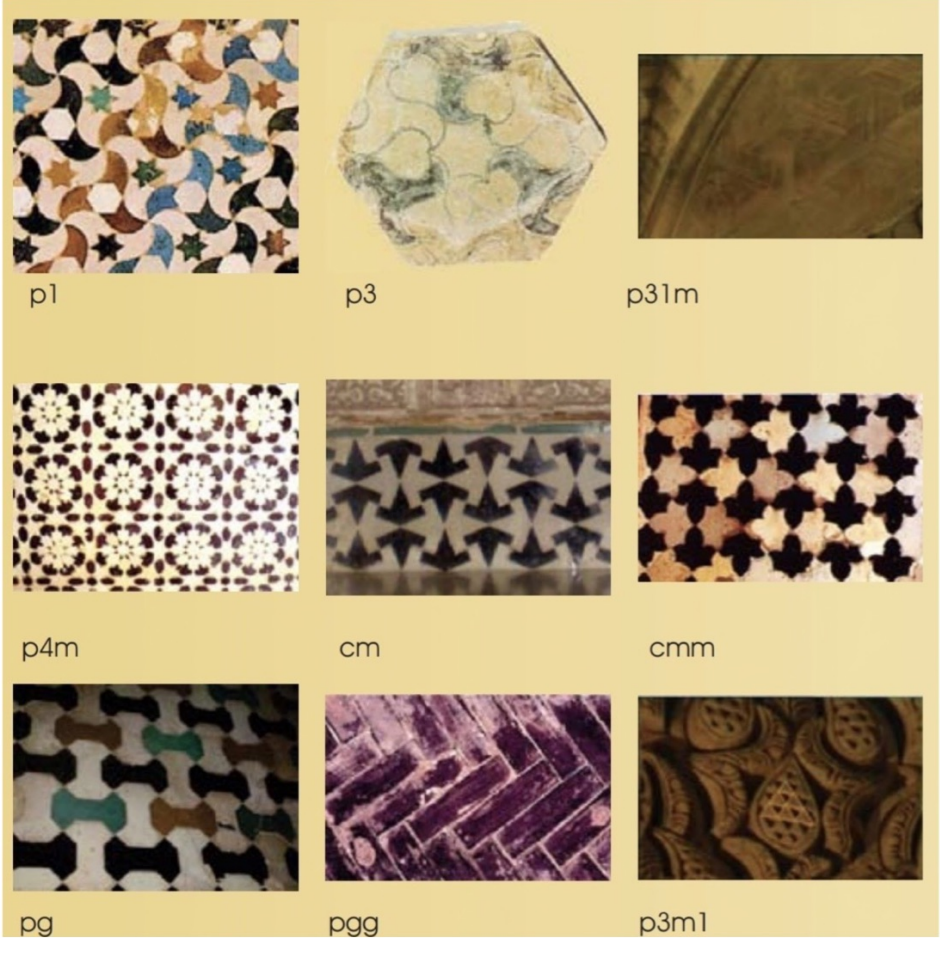


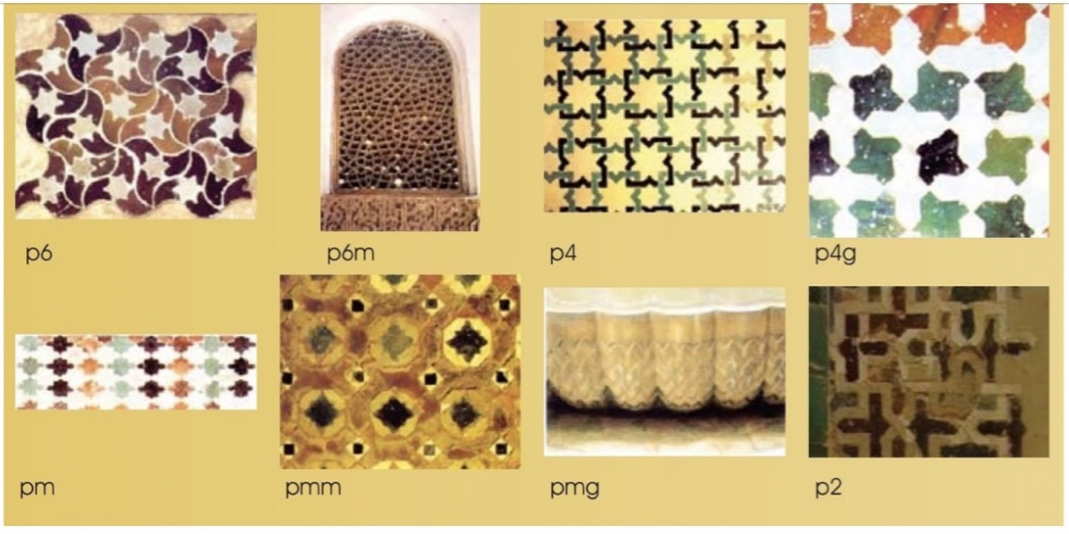


El primer lugar de toda la civilización donde se han utilizado los 17 tipos de mosaicos

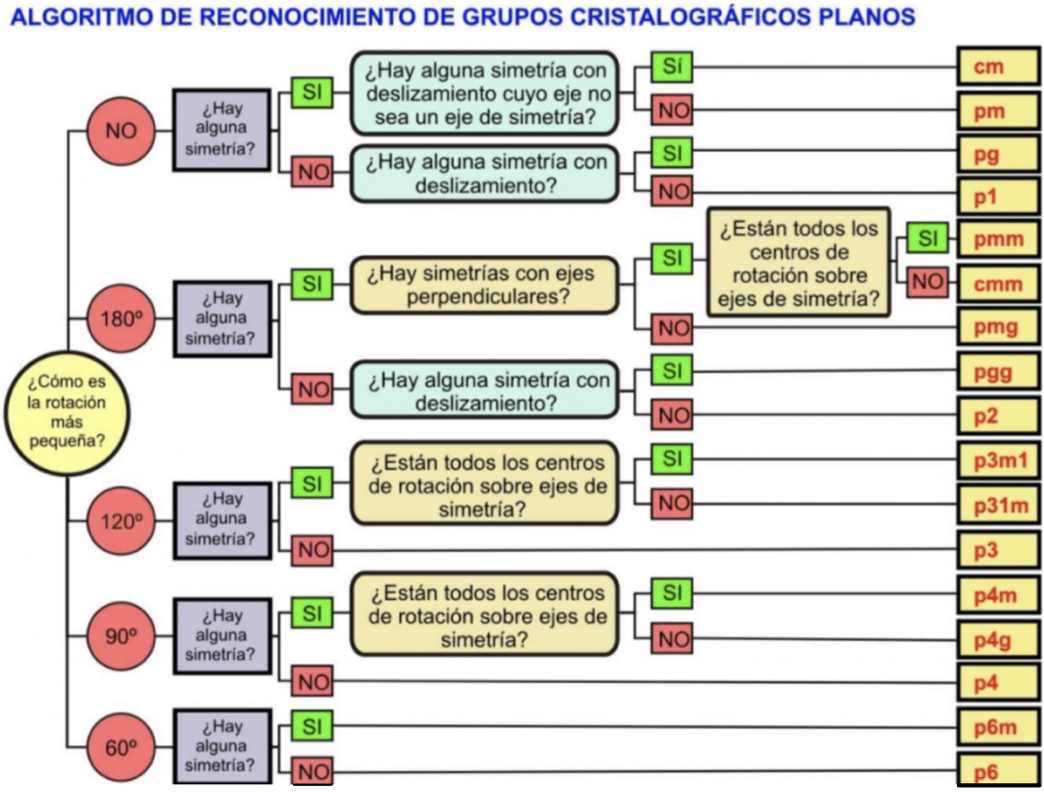
La Alhambra es el único monumento construido antes del descubrimiento de la Teoría de los Grupos que cuenta con al menos un ejemplo de cada uno de los grupos cristalográficos planos. Existen 17 tipos de mosaicos según esta teoría, los cuales se rigen por cuatro movimientos en el plano: el giro, la simetría, las traslaciones y las simetrías con desplazamiento.

Combinando estos movimientos se generan estos **17 tipos de mosaicos, y la Alhambra los reúne todos**. Ningún otro lugar en todo el mundo lo consiguió antes.

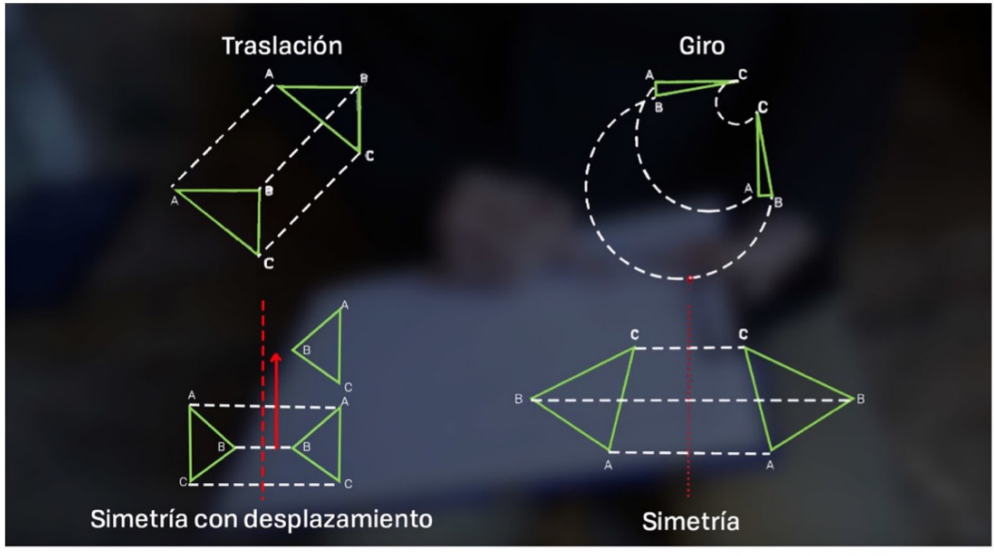




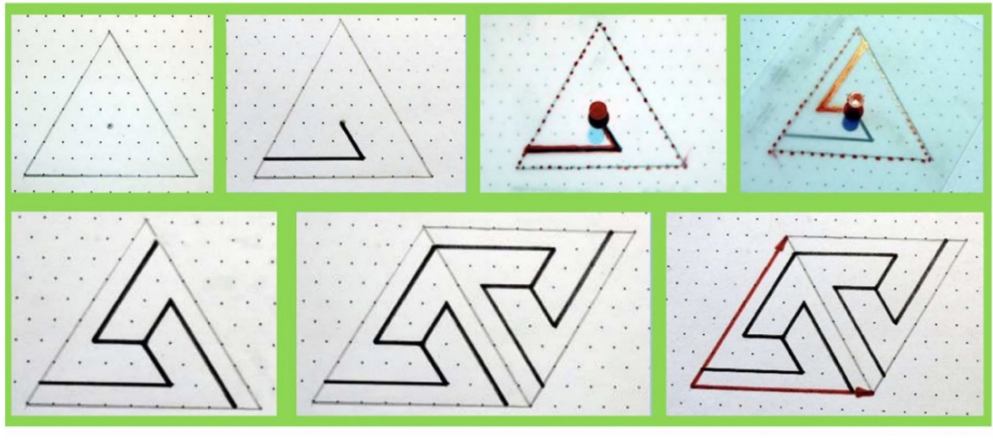
Aunque veamos mosaicos muy distintos, es posible que pertenezcan a un mismo grupo cristalográfico.

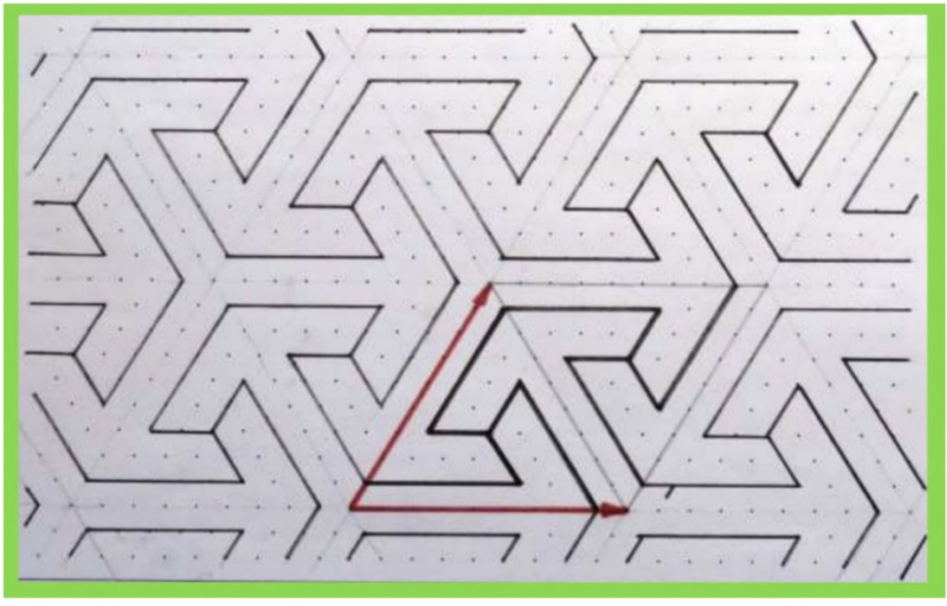


Todas estas variaciones se pueden realizar según estos cuatro movimientos de plano.



Según cómo se forme el motivo mínimo inicial, los giros que se hagan y qué tipos de movimientos sobre plano se ejecuten, podemos crear diversos tipos de mosaicos, como este de la Puerta del Vino.







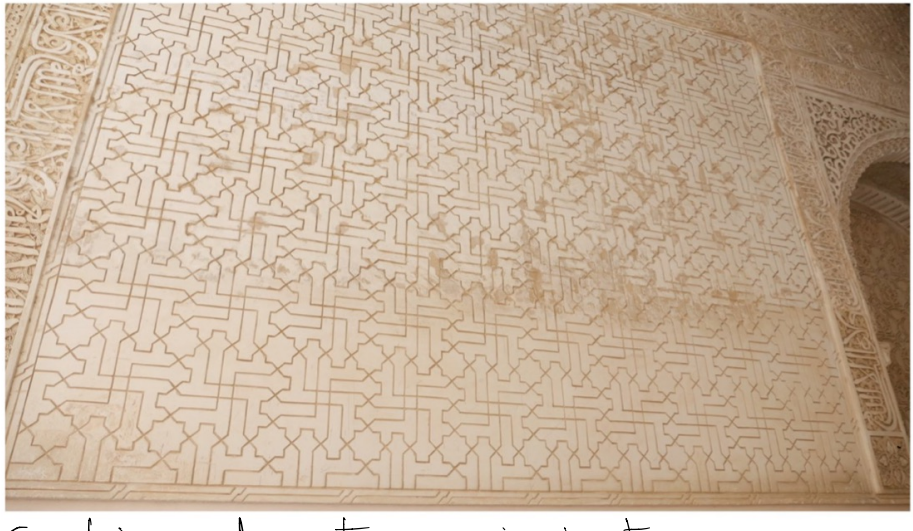
El mosaico es un elemento que aparece de forma muy común a lo largo de la Alhambra no solo por razones estéticas, sino porque también representa una idea del Islam: como no permite representar gráficamente a su dios de ninguna forma, se recurre a ideas, conceptos o epigrafías.

Un mosaico es una imagen que se repite de forma infinita, un motivo que se va repitiendo hasta ocupar todo el espacio. **Representa la idea de un solo dios que está en todas partes, algo único que lo cubre todo**, un concepto que entronca con la teoría islámica.

La repetición se rige por cuatro movimientos:



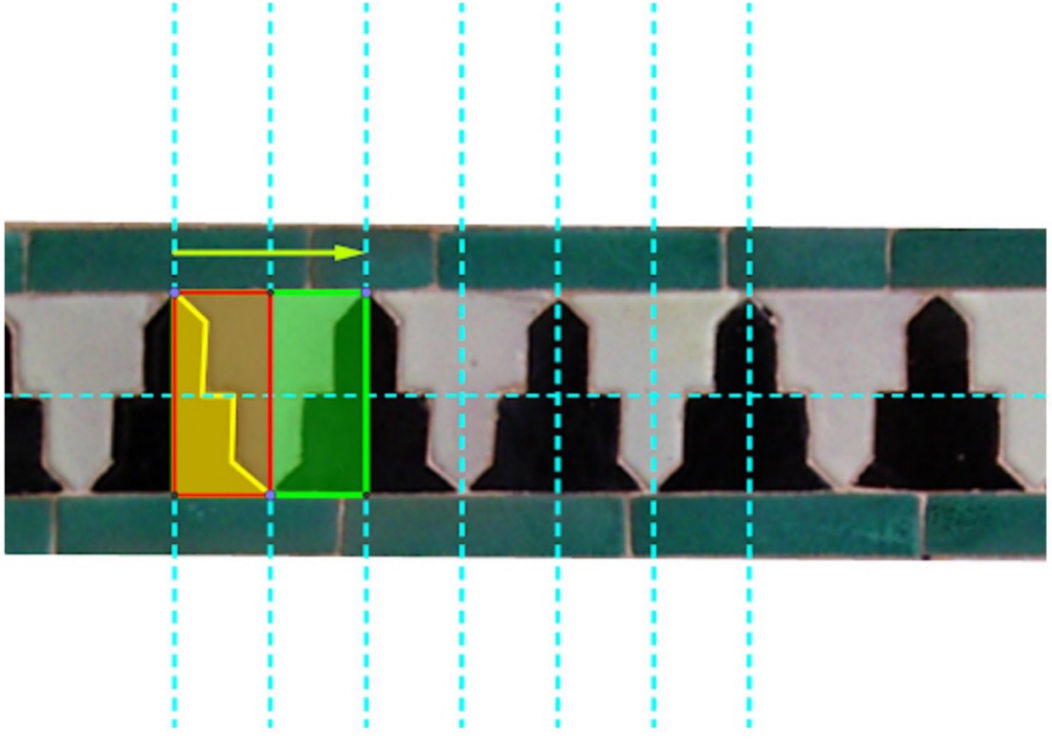
giro, simetría, traslación y simetría con desplazamiento.



Combinando estos movimientos se generan 17 tipos de mosaicos. En la Alhambra hay representación de todos.

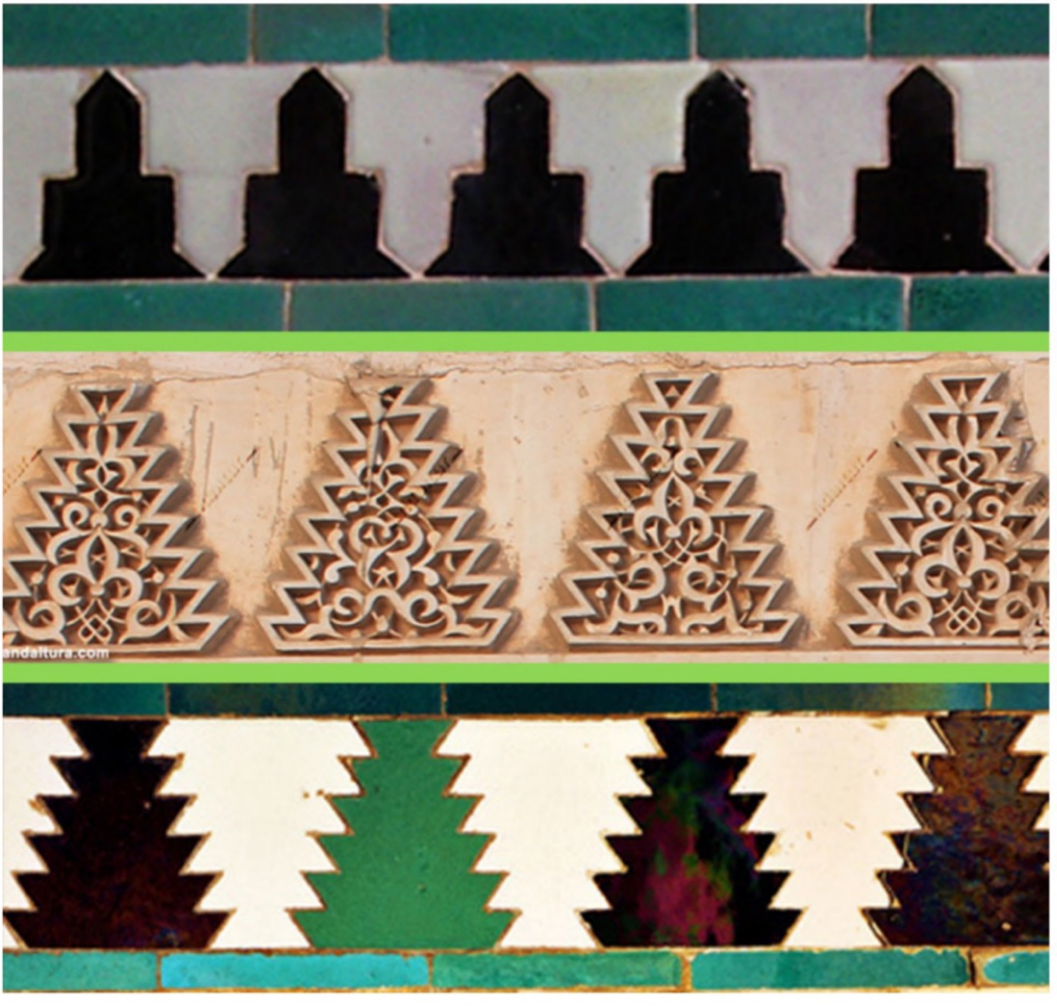
El friso: otro elemento matemático recurrente en la Alhambra

Los frisos funcionan de una forma muy parecida a los mosaicos, solo que la diferencia es que se traslada en una u otra dirección paralela para rellenar todo el plano mediante la traslación del motivo mínimo, en vez de hacerlo en todas las direcciones como ocurre con los mosaicos.



Los frisos se han utilizado como motivo de decoración en dólmenes prehistóricos, decoraciones egipcias, templos griegos... Y también en la Alhambra, donde fueron muy empleados en su decoración.

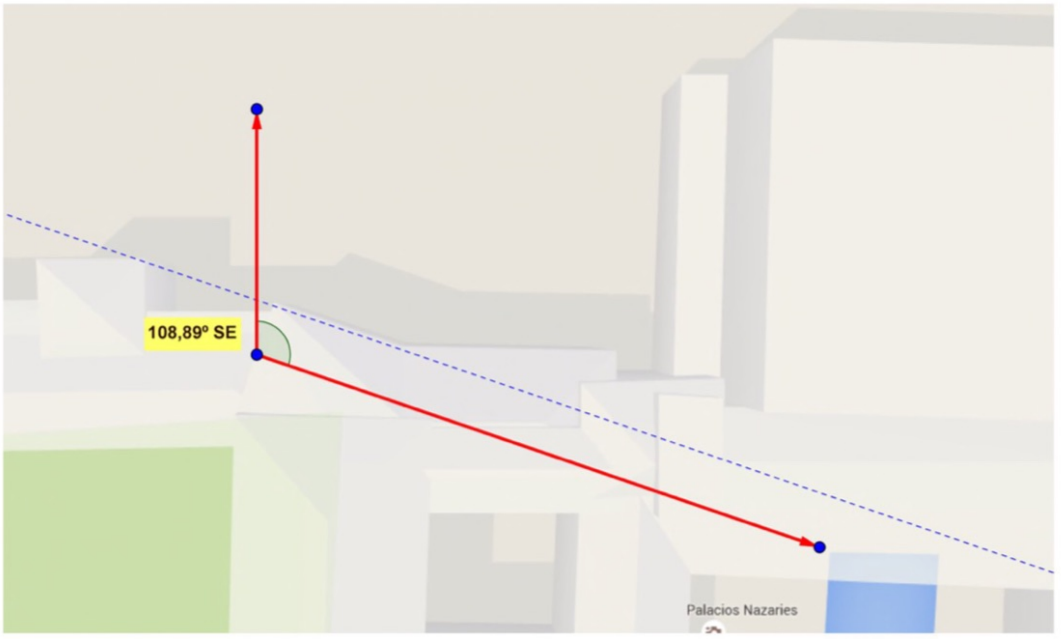
En geometría existen siete tipos de frisos que se clasifican según el algoritmo de Rose-Stafford, y como ocurre con los mosaicos, **los siete están en la Alhambra**.



Un oratorio orientado de matemáticamente hacia la Meca

En pleno 2019 los musulmanes pueden usar una aplicación en su smartphone que les indica de forma sencilla hacia dónde deben orientarse para realizar sus oraciones mirando hacia la Meca. Podemos saber gracias a la tecnología que la dirección correcta de orientación desde Granada debe ser 100,4º SE, ¿qué dirección tiene el Oratorio del Mexuar, parte de la Alhambra?

Si lo comprobamos utilizando la planimetría de Google, o el software GeoGebra, podemos ver que se obtiene un azimut de 108,89º ("azimut" se refiere a un ángulo de la orientación sobre la superficie de una esfera real o virtual).



Si la orientación matemática correcta es 100,4º SE y el oratorio se orienta en 108,62º SE, entendemos que tiene una desviación de 8,22º SE, ¿está mal orientado el Mexuar? No realmente. Es más, **es uno de los mejor orientados de Al-Ándalus**.



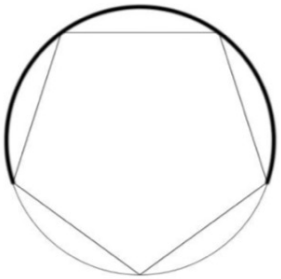
Para entrar en contexto debemos saber que Abderramán I (año 786) comienza a construir el oratorio de la Mezquita de Córdoba orientada con un ángulo de 152º SE, es decir, con 51,6º SE de error. La cuestión es que muchas mezquitas posteriores se construyeron teniendo de referencia a la mezquita de Córdoba, **por lo que la mayoría de las mezquitas de Al-Ándalus no están orientadas de forma óptima**.

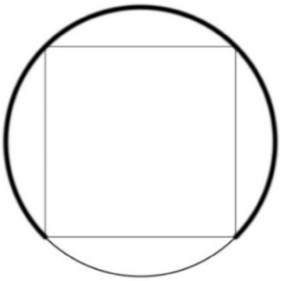
Sin embargo, posteriormente empezaron a usarse métodos astronómicos y trigonométricos más precisos para orientar las mezquitas, como la Mayor de Medina Azahara, construida en la época de Abderramán III, en el siglo X. Esa sí fue orientada correctamente. Aconsejado por sus astrónomos, Abderramán III construyó la Medina Azahara con un ángulo aproximado al 108,33º, hecho que posiblemente influyó en que el Mexuar tuviera prácticamente la misma orientación.

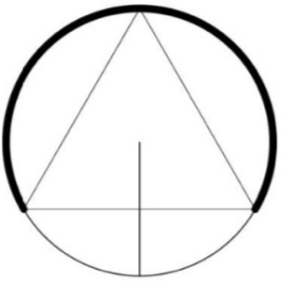
Cabe destacar que el mejor orientado de todo Al-Ándalus es el oratorio privado del sultán en el Palacio de Comares, en la Alhambra, con 101º, sin duda combinación de cálculos exactos por parte de sus astrónomos y coordenadas geográficas excepcionalmente precisas.

FORMAS GEOMÉTRICAS Y PROPORCIONES:

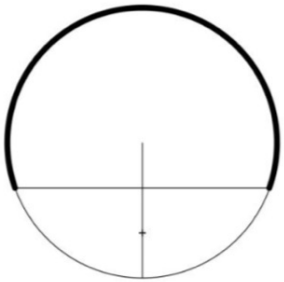
Una de las formas características de la arquitectura árabe es el *arco de herradura*. Mientras que el *arco de medio punto* tiene forma de media circunferencia, el arco de herradura supera la semicircunferencia. En diferentes construcciones y épocas se han usado distintas formas de decidir el trozo de circunferencia que determinaba el arco de herradura, como puedes ver en las figuras que siguen.



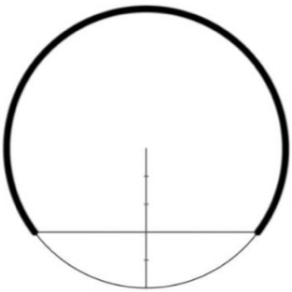




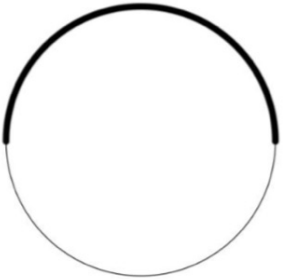
1/2 del radio



1/3 del radio

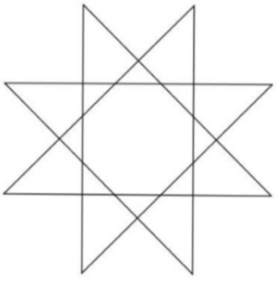


3/5 del radio

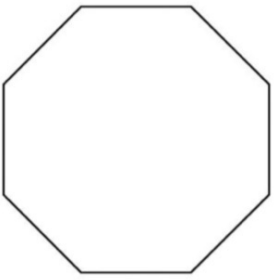


Arco de medio punto

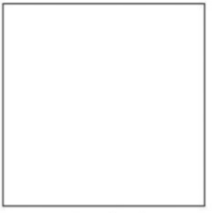
Otras de las figuras emblemáticas en la arquitectura y arte árabes es el cuadrado, así como las figuras y decoraciones que derivan o se apoyan en él, como el octógono o las decoraciones geométricas cuya base constructiva es una cuadrícula.



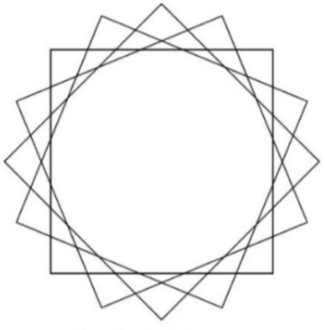
Estrella de 8 puntas



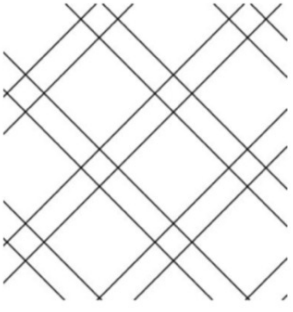
Octógono regular



Cuadrado

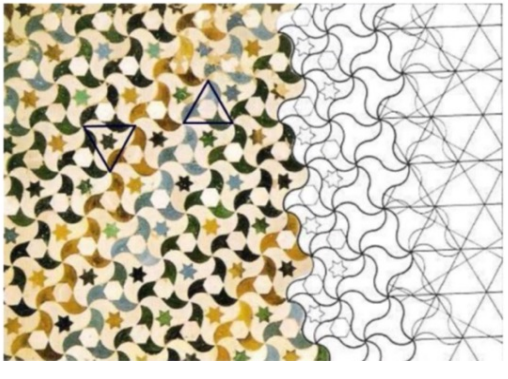


Estrella de 16 puntas



Mosaico de cuadrados

En La Alhambra pueden encontrarse también otras formas geométricas, como los triángulos, hexágonos, dodecágonos (polígonos de 12 lados) o hexadecágonos (polígonos de 16 lados). Aquí tienes algunos ejemplos:



Celosías Palacio Generalife



PROPORCIONES:

Una proporción es el cociente o razón de dos medidas. el *arco de herradura* construido usando un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia podemos decir que es 2/3 de la circunferencia completa o que el *arco de medio punto* es 1/2 de la circunferencia.

El uso de formas y medidas con determinadas proporciones marca la estética de un edificio u obra de arte. Todos hemos oído o usado el término "bien proporcionado".

De todos los objetos que podemos decir que tienen una buena proporción, hay una figura geométrica donde destaca especialmente la proporción, y es en el RECTÁNGULO. La *proporción de un rectángulo* es el *cociente entre la medida del lado mayor y la del lado menor*. Este número marca la estética del rectángulo, indicando si es más o menos alargado.

Todos los rectángulos con la misma proporción son *semejantes* entre sí, es decir, son igual de alargados o achatados, sólo se diferencian en su tamaño.

Hay unas determinadas proporciones que tradicionalmente han sido más usados que otros en arte. Veamos dos de esos rectángulos:

RECTÁNGULO	NOMBRE Y VALOR DE LA PROPORCIÓN	POLÍGONO REGULAR ASOCIADO	COMENTARIOS
Rectángulo de Oro o áureo	**Número de oro:** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$	Aparece en *pentágonos* y *decágonos* regulares	Se ha usado muchísimo en arquitectura, especialmente en la Grecia clásica y el Renacimiento. Tiene muchas propiedades, entre ellas, que si dentro de un rectángulo áureo dibujas el cuadrado formado con el lado menor, el rectángulo que sobra también es áureo. Aparece en nuestros DNI o tarjetas de crédito
Rectángulo raíz de 2	$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$	Es la proporción entre la diagonal y el lado de los *cuadrados*	Es muy fácil de construir a partir de un cuadrado y tiene la propiedad de que si lo divides por la mitad o lo duplicas, el rectángulo resultante tiene la misma proporción. Es la proporción que usan los formatos habituales de folio (DIN A4, A3, A5,...)

En la Alhambra podemos encontrar algunos de estos rectángulos. Por ejemplo, en la fachada del Palacio de Comares encontramos el rectángulo áureo, con sus correspondientes recíprocos internos.



Fachada Palacio de Comares

RECTÁNGULO ÁUREO

RECTÁNGULO RAÍZ DE DOS